Lemme : Gourdon p92
Thm : à apprendre !

SUITE DE POLYGONES

149, 181, 226

Lemme : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Posons $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$. Posons enfin

$$C(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$ On a $\det(C(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{k=1}^{n} P(\omega^k)$.

Thm : Soit P un polygone du plan dont les sommets ont pour affixe $z_1, \dots, z_n$. On définit la suite de polygones définie par $P_0 = P$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
La suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des sommets de P.

Preuve du lemme : Posons $J = C(0,1,0,\dots,0)$ de sorte que $C(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k J^{k-1}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Une solution du système $J\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifie $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \lambda^n x_k$. On en déduit que $Sp(J) \subseteq \mathbb{U}_n = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$. Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le vecteur $\Omega_k := {}^t(1 \ \omega^k \ \cdots \ \omega^{k(n-1)})$ vérifie $J\Omega_k = \omega^k \Omega_k$. Ainsi, $\mathbb{U}_n \subseteq Sp(J)$, puis $Sp(J) = \mathbb{U}_n$. Donc J a n valeurs propres distinctes, donc J est diagonalisable : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}JQ = \mathrm{Diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}) =: D$, et donc :

$$\det(C(a_1, \dots, a_n)) = \det(P(J)) = \det(Q^{-1}P(D)Q) = \det(P(D)) = \prod_{k=1}^{n} P(\omega^k) \quad \blacksquare$$

Preuve du Thm : Pour $k \in \mathbb{N}$, on représente P_k par le vecteur colonne $Z_k := {}^t(z_1^{(k)} \ \cdots \ z_n^{(k)})$ des affixes de ses sommets. Si on note $g = \frac{1}{n}(z_1^{(0)} + \cdots + z_n^{(0)})$ l'affixe de l'isobarycentre de P, alors le but est de montrer que $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ${}^t(g \ g \cdots g)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de P_{k+1}, $Z_{k+1} = {}^t\left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2} \ \ \frac{z_2^{(k)} + z_3^{(k)}}{2} \ \cdots \ \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right) = AZ_k$ où $A = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J$ avec J définie dans la Preuve du Lemme. De là, $Z_k = A^k Z_0$, et l'étude de la convergence de $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est ramenée à celle de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, le choix de la norme importe peu.
Remarquons que $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \det\left((X - \frac{1}{2})J^0 - \frac{1}{2}J^1\right) = \det\left(C(X - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)\right)$. D'après le lemme (qui s'étend naturellement de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}[X]$), $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1+\omega^k}{2}\right)$ (NB : le polynôme associé au déterminant circulant est $P(T) = (X - \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})T$). Ainsi, $Sp(A) = \left\{\frac{1+\omega^k}{2}\right\}_{1 \leq k \leq n}$, et χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}\left(1, \frac{1+\omega}{2}, \dots, \frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right)$.
Or pour tout $\ell \in [\![1, n-1]\!]$, $\left|\frac{1+\omega^\ell}{2}\right| = \left|e^{i\ell\pi/n} \frac{e^{-i\ell\pi/n} + e^{i\ell\pi/n}}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi\ell}{n}\right)\right| < 1$, donc $\left(\frac{1+\omega^\ell}{2}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. De là,

$A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0) =: B$. Par continuité de la multiplication matricielle, $Z_k \longrightarrow BZ_0 =: G$, et $G = AG$ ($k \to +\infty$ dans $Z_{k+1} = AZ_k$). Ainsi, $G \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$, mais ce sous espace propre est de dimension 1 car 1 est une valeur propre simple de A, et ${}^t(1 \ 1 \cdots 1) \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$, donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $G = {}^t(a \ a \cdots a)$, autrement dit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le point d'affixe a.
Enfin, $a = g$: en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'isobarycentre de P_{k+1} a pour affixe $\frac{1}{n}\left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2} + \cdots + \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right) = \frac{1}{n}(z_1^{(k)} + \cdots + z_n^{(k)})$, autrement dit tous les P_k ont le même isobarycentre, à savoir g. Comme $Z_k \longmapsto \frac{1}{n}(z_1^{(k)} + \cdots + z_n^{(k)})$ est continue, on en déduit que $a = g$. $\blacksquare$

Commentaires

- À quoi ça sert ? Bonne question, il est plus efficace d'utiliser l'associativité du barycentre.
- Justifions les recasages :
  - 149 : C'est le plus difficile à justifier. Dans la preuve du lemme, on détermine les valeurs propres de J (sans calculer son polynôme caractéristique. On s'en sert pour simplifier le calcul d'un déterminant. Dans la preuve du théorème, on détermine les valeurs propres de A à partir de son polynôme caractéristique. On s'en sert pour étudier la convergence de la suite de ses puissances. Remarquez que la recherche de la limite de $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ revient à chercher un vecteur propre (particulier) associé à 1.
  - 152 : Le lemme s'y inscrit clairement. Cependant, ce n'est pas un argument suffisant. On calcule ensuite un polynôme caractéristique, qui est un déterminant. Attention, le jury peut ne pas être d'accord avec ce recasage.
  - 226 : On étudie la convergence d'une suite vectorielle.